
Mécanique analytique, Série 3

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch
 luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch
 nathan.brunet@epfl.ch

lorenzo.fioroni@epfl.ch
 filippo.ferrari@epfl.ch
 jonas.daverio@epfl.ch

leo.goutte@epfl.ch
 mathias.findrihan@epfl.ch
 remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Particule chargée avec ressort radial dans un champ magnétique uniforme

On considère une particule de masse m et de charge q , contrainte de se mouvoir dans le plan $z = 0$. Un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$ est appliqué perpendiculairement au plan. La particule est reliée à l'origine $r = 0$ par un ressort de raideur k et de longueur à vide r_0 .

En coordonnées cylindriques (r, θ) dans le plan, le potentiel généralisé associé à la force de Lorentz s'écrit

$$U(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = -q \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{qB}{2} r^2 \dot{\theta}, \quad (1)$$

où l'on a utilisé la jauge symétrique $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

Le potentiel élastique du ressort est

$$V_{\text{ressort}} = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2.$$

1. Construction du lagrangien.

- (a) Écrire l'énergie cinétique T en coordonnées cylindriques.
- (b) En déduire le lagrangien complet

2. Quantité conjuguée et constante du mouvement.

- (a) Écrire l'impulsion conjuguée ℓ associée à θ . Montrer qu'elle est conservée.
- (b) En déduire une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de r et ℓ .

3. Réduction à une dynamique radiale effective.

- (a) Donner les équations du mouvement radial. Montrer que l'on peut y éliminer la coordonnée angulaire en introduisant un potentiel effectif $V_{\text{eff}}(r; \ell)$.
- (b) Trouver l'expression pour $V_{\text{eff}}(r; \ell)$.
- (c) Calculer $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}$ et trouver la condition d'équilibre $dV_{\text{eff}}/dr = 0$.

4. Étude des solutions circulaires.

- (a) Montrer qu'il existe un unique rayon d'équilibre $r_*(\ell)$ pour chaque valeur de ℓ .
- (b) Que vaut ℓ pour que la position d'équilibre r_* se situe à r_0 ? Quelle est l'équation du mouvement pour θ dans ce cas? Expliquer physiquement cette solution.

- (c) Discuter qualitativement la position de r_* par rapport à r_0 si $|\ell|$ est plus grand ou plus petit que la valeur de la question précédente. Comment la coordonnée angulaire se comporte-t-elle alors à l'équilibre ?

5. Petites oscillations radiales autour de l'équilibre. Dans ce cours, nous n'avons pas encore introduit de manière générale la théorie des petites oscillations, nous allons donc traiter ce cas particulier étape par étape. On suppose que le rayon s'écarte légèrement de l'équilibre :

$$r(t) = r_* + \rho(t), \quad |\rho(t)| \ll r_*.$$

- (a) Montrer que la petite déviation ρ est régie par l'équation du mouvement

$$m\ddot{\rho} + \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r_*} \rho + o(\rho^2) = 0.$$

où $\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r_*}$ est évalué à $r = r_*$.

- (b) En déduire qu'à l'ordre dominant (ordre linéaire en ρ), $\rho(t)$ est une oscillation harmonique de pulsation

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r_*}. \quad (2)$$

- (c) Calculer explicitement ω_r^2 et montrer que

$$\omega_r^2 = \frac{k}{m} + \frac{\omega_c^2}{4} + 3\left(\dot{\theta}_* + \frac{\omega_c}{2}\right)^2, \quad (3)$$

où $\dot{\theta}_* = \frac{\ell}{mr_*^2} - \frac{\omega_c}{2}$ est la vitesse angulaire de la trajectoire circulaire.

- (d) Vérifier la cohérence de l'approximation : expliquer pourquoi la solution $\rho(t)$ reste effectivement petite par rapport à r_* .

6. Cas particulier $r_* = r_0$.

- (a) Montrer que dans le cas où $r_* = r_0$, la pulsation des petites oscillations est

$$\omega_r^2 = \frac{k}{m} + \omega_c^2.$$

- (b) Interpréter cette expression.

Exercice 2 : Déviation d'une bille de billard

On considère une bille (modélisée par un point matériel de masse m) se déplaçant sans frottement sur un billard parfaitement horizontal, solidaire avec la Terre. On adopte un repère local tangent au lieu d'expérience :

$$\hat{\mathbf{x}} = \text{est}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \text{nord}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \text{haut}.$$

La Terre tourne avec la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ de norme $\Omega_{\oplus} \simeq 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. À la latitude λ , on a

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega_{\oplus} \cos \lambda, \Omega_{\oplus} \sin \lambda).$$

Le billard est réglé pour être horizontal par rapport à la pesanteur effective (la partie centrifuge est donc compensée par la réaction du support). On négligera toute composante verticale du mouvement et toute dissipation.

1. Choisir un référentiel en rotation à vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$, donc solidaire avec la terre. Dédire la forme générale du potentiel généralisé associé à la force de Coriolis $F_c = 2m \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega}$. Nous allons négliger la force centrifuge.

La bille est lancée à $t = 0$ depuis l'origine avec une vitesse strictement dirigée nord (y), de norme v_0 :

$$\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0), \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = (0, v_0, 0).$$

2. Supposer que le mouvement est contraint sur le plan horizontal (x, y) (la bille ne peut pas sauter). En notant $\Omega_z \equiv \Omega_{\oplus} \sin \lambda$, écrire le potentiel généralisé et le lagrangien du système.
3. Écrire les équations d'Euler-Lagrange pour x et y .

4. La bille est lancée à $t = 0$ depuis l'origine avec une vitesse strictement dirigée nord (y), de norme v_0 :

$$\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0), \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = (0, v_0, 0).$$

Résoudre le système pour les vitesses puis intégrer pour obtenir la trajectoire $(x(t), y(t))$ satisfaisant les conditions initiales. Montrer que

$$v_x(t) = v_0 \sin(2\Omega_z t), \quad v_y(t) = v_0 \cos(2\Omega_z t),$$

$$x(t) = \frac{v_0}{2\Omega_z} (1 - \cos(2\Omega_z t)), \quad y(t) = \frac{v_0}{2\Omega_z} \sin(2\Omega_z t).$$

Interpréter géométriquement la trajectoire dans le plan : sens de rotation et centre instantané.

5. On suppose que la bille parcourt une distance nord-sud L (donc $y \approx L$ pour des temps courts). En développant à l'ordre dominant en $|\Omega_z t| \ll 1$, montrer que

$$y(t) \simeq v_0 t, \quad x(t) \simeq \Omega_z v_0 t^2.$$

En déduire la déviation est-ouest Δx en fonction de L et v_0 :

$$\Delta x \simeq \frac{\Omega_z L^2}{v_0}.$$

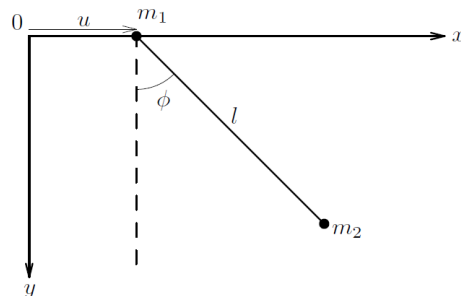
Discuter le signe de Δx dans l'hémisphère nord ($\lambda > 0$) et sud ($\lambda < 0$).

6. Pour $\lambda = 46^\circ$ (Suisse), $L = 3 \text{ m}$ et $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$, estimer Δx en millimètres. Conclure sur la possibilité d'observer l'effet sur un billard réel.

Exercice 3 : Pendule avec pivot glissant

Un pendule plan de longueur l et de masse m_2 est soumis à l'action de la gravité. Son point de suspension de masse m_1 peut se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal x .

- a) Écrire le Lagrangien de ce système en termes des coordonnées généralisées u et ϕ .
- b) Établir les équations d'Euler-Lagrange et déterminer les constantes du mouvement.



- c) Considérer les conditions initiales $u(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, $\dot{u}(0) = v_0$ et $\phi(0) = \alpha$.
- i) Utiliser une des constantes du mouvement pour éliminer $u(t)$ (exprimer $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$).
 - ii) Établir l'équation différentielle décrivant l'évolution de $\phi(t)$ et la résoudre dans l'approximation des oscillations lentes et de faible amplitude.
 - iii) Trouver le $u(t)$ correspondant.
 - iv) Vérifier sous quelles conditions cette solution est valable.